

Олег Николаевич Таганов

tonbright@gmail.com

Кандидат искусствоведения, доцент, докторант при Научно-исследовательском центре методологии исторического музыкознания Московской государственной консерватории им. П. И. Чайковского

Oleg N. Taganov

tonbright@gmail.com

Ph.D., Associate Professor, Doctoral candidate at the Research Centre of the Methodology of Historical Musicology of the Moscow State P. I. Tchaikovsky Conservatory

Пространственно-структурные особенности кварто-квинтового круга: Декартова Матрица

Аннотация

Автором статьи исследуется проблема корреляции свойств 12-элементной равномерно-темперированной музыкальной системы, ее плоскостной модели и правильного додекагона. В рамках плоскостной модели выявляется конструктивная роль диагонали связности $\{12/5\}$ и предлагается формула для корреляции кварто-квинтового и хроматического представления системы. Впервые указывается на возможность трансляции плоскостной модели кварто-квинтового круга в трехмерную модель правильного многогранника (додекаэдра). На основе анализа свойств комплекса P-R-I-RI в музыке и аналогичных пространственно-симметричных комплексов в других сферах научных знаний предлагается обобщенная унификация их определения как Декартовой Матрицы. Выявляются константные «резонансно-узловые» элементы системы. Определяется ряд задач для дальнейших исследований.

Ключевые слова

Декартова матрица, квинтовый круг, додекагон, диагональ связности, музыка, геометрия, непрерывность

Spatial and structural features of the quarto-quintic circle: Cartesian Matrix

Abstract

The author of the paper investigates the problem of correlation between the properties of a 12-element even-tempered musical system, its planar model, and the proper dodecagon. Within the framework of the planar model, the constructive role of the connectivity diagonal $\{12/5\}$ is revealed and a formula for correlating the fifths and chromatic representations of the system is proposed. For the first time, the possibility of translating the planar model of the circle of fifths into a three-dimensional model of a regular polyhedron (dodecahedron) is pointed. Based on the analysis of the properties of the P-R-I-RI complex in music and similar spatially symmetric complexes in other spheres of scientific knowledge, a generalized unification of their definition as a Cartesian Matrix is proposed. The constant "resonance-node" elements of the system are identified. A number of tasks for further research are defined.

Keywords

Cartesian matrix, circle of fifths, dodecagon, connectivity diagonal, music, geometry, continuity

Европейская музыкальная традиция при всей своей самобытности и уникальности в историческом развитии имеет с другими музыкальными традициями общий *объективный* источник формирования, лежащий в неизменном акустическом строении натурального звукоряда, который послужил основой числовых пропорций в музыке. Данное обстоятельство позволяет применять к изучению даже самых неуловимых оттенков в изменениях музыкальной ткани некоторые методы строгой логики и математического анализа. Об этом было известно ученым Античной Греции, Древней Индии и Китая, Древнего Египта и Месопотамии. В европейской музыкальной традиции большой импульс развитию теории музыки с опорой на физико-акустический фундамент придал в XVIII Ж.-Ф. Рамо. Формальное описание обертоновой природы гармоничного тона¹ и особенностей слухового восприятия в трудах немецкого математика Г. Гельмгольца [2] дало в руки исследователям музыки точный «измерительный инструмент» и ключ к пониманию акустических музыкальных феноменов. С более широких философских позиций подошел к рассмотрению музыки как предмета логики русский философ, историк, искусствовед А. Лосев [7]. Он обеспечил коллег интегральным методом анализа музыкального произведения как целостного объекта. В русле объединения этих подходов развитие музыкально-теоретических систем успешно продолжается по сей день. Так или иначе, все наиболее значимые концептуальные достижения в науке (в широком смысле) находят отражение в музыкальной практике, переосмысливаясь на различных уровнях в разных комбинациях и сочетаниях и формируя определенную композиционную технику, поскольку «...техника композиции по самой природе своей явление синтетическое (если не синкретическое): направленная на создание музыки как целого, техника «обрабатывает» музыкальную материю в разных аспектах (хотя и не в равной мере) и, значит, соприкасается — так или иначе, со знаком «плюс» или хотя бы «минус» — со всеми базовыми теоретическими дисциплинами» [12, 43]. В данной статье предлагается рассмотреть некоторые взаимосвязи между свойствами кварто-квинтовой системы в музыке и особенностями геометрии додекагона и круга.

Структура плоскостной модели (схемы) кварто-квинтового круга тональностей в условиях равномерной 12-элементной темперации дублирует строение правильного (равностороннего) додекагона или часового циферблата. Геометрические свойства и особенности вписанного в окружность правильного додекагона можно рассматривать с нескольких позиций. Нас прежде всего будут интересовать свойства симметрии и угловые величины данного многоугольника в применении к равномерно темперированной системе кварто-квинтового круга в музыке. На основе математического анализа мы попытаемся обосновать некоторые особенности музыкальной системы и возможность применения пространственно-геометрических методов в рассмотрении гармонических соотношений в музыке.

В дошедшей до нас европейской музыкально-теоретической литературе описание системы квинтового круга («колеса») впервые было представлено в виде замкнутой окружности в трактате Николая Дилецкого «Идея грамматики мусикийской» (1679²) [5, 133–134]. В источнике эта схема имеет название «Глас грома твоего в колеси. Безначальное и

¹ По сравнению с «гармоничными тонами» строение тона, издаваемого, например, церковными колоколами, является «негармоничным», точнее, он имеет более сложную квадратичную гармоническую структуру.

² 1679 — год написания московского варианта трактата. Первоначальный расширенный вариант «виленской редакции» был создан ранее 1677 года (см. [3, 44]).

бесконечное» для мажорного наклонения и «Образ колесо пришелец на земли» — для минорного (Иллюстрация 1).



Иллюстрация 1. Н. Дилецкий. «Идея грамматики мусикийской» (1679) (РГБ. Ф. 173. № 107. Л. 133–134).

В мажорной схеме (Л. 133) «тональность»³ показана на основе интонационного тяготения квинтового тона в основной с нисходящей в начале верхней «тонической» терции и завершающим скачком нисходящей «тонической» квинты, последний звук которой приравнивается к квинтовому тону последующей «тональности». Расшифровку данных схем можно найти в труде «Николай Дилецкий. Идея грамматики мусикийской» с переводом и комментариями В. Протопопова [8, 395]. Начальная «тональность» (по авторскому порядковому номеру «1» — до-мажор. Логика движения по тональностям основана на отношении тяготения условных D–T при движении по часовой стрелке. Минорная схема, расположенная на следующем листе, построена из последовательности разложенных нисходящих условно «тонических» трезвучий и квинтовых нисходящих интонаций, определяющих «тональности», к которым они принадлежат. В качестве первой тональности автором выбран ре-минор и по вращению часовой стрелки происходит перемещение в сторону бемольных «тональностей» (G, C и т.д.), так же на основе соотношения условных D–T.

Из сопоставления данных схем видно, что структурное мышление автора не выявляет свойств параллельности мажора и минора, но уже указывает на эти наклонения со всей очевидностью. То есть схематически здесь логика движения по условным «тональностям» соответствует тяготению D–T. Позже мелодические фрагменты в обеих схемах заменили ключевыми знаками, но логика перемещения сохранилась.

³ Здесь термин «тональность» будем использовать лишь для удобства привязки лада к определенной высоте и интервальному отношению между их примами

Принципы музыкальной композиции как творческо-логического процесса закладывались в Раннем Средневековье и были тесно связаны с принципами метрической организации времени. Взаимодействие музыки и слова очень велико, порой в истории они менялись местами в своем влиянии друг на друга, поскольку «слово, образ, понятие ищет некоторого выражения, аналогичного музыке, и само испытывает теперь на себе ее могущество», как пишет об этом Ф. Ницше в работе «Рождение трагедии из духа музыки» [9, 77]. Выросшая из ритмо-силлабической стихотворной системы, базировавшейся на древнегреческих и древнеримских стихотворных стопах и активно разрабатывавшейся со времен Августина Блаженного (IV в.), система музыкальных модусов и модальной нотации в эпоху *Ars antiqua* (XII–XIV вв.) ориентировалась преимущественно на «божественное совершенство» троичного (перфектного) деления временного отрезка — мензуры. Этот *modus operandi* существовал вплоть до эпохи *Ars nova* (XIV–XVII вв.), когда Филипп де Витри произвел многоуровневую революцию в развитии музыкального искусства, в том числе эмансипировав двоичное (имперфектное) деление музыкальных метрических единиц. Развертывание модусов во времени позволило также выработать первичные принципы пространственного композиционного мышления, используя обратное ритмическое прочтение модусов (например, единичная перфекция: трохей |♩ ♪ | ↔ ямба |♩ ♪) и обусловив тем самым появление такого феномена, как ритмический ракоход. Дактиль и анапест представляют собой «ритмо-блоковый» ракоход (двоичная перфекция: дактиль |♩. | ♪ ♪ | ↔ анапест | ♪ ♪ |♩. |). Поскольку развертывание во времени ассоциировалось с перемещением по горизонтали слева-направо (следуя написанию нот), то ракоходный принцип также выражался горизонтальным перемещением, но в обратном направлении (время вспять). Из этого можно сделать вывод о генезисе концептуальных пространственных вообще и пространственно-динамических, категорий в музыке преимущественно на основе привязки к вектору развертывания ритма (и шире — интонации) во времени. Первичным пространственным преобразованием ритмического и интонационного оригинала, таким образом, следует считать *горизонтальное* ретроградное развертывание во времени — ракоход.

Позже, с развитием техники многоголосия и постепенной корректировкой музыкального строя в сторону равномерной темперации, все большее значение приобретает второй пространственный тип преобразования — инверсия, или *вертикальное* обращение относительно какой-либо определенной звуковысотной оси. По сути, обращение в пределах октавы, с математической точки зрения представляющее собой «дополнение до двух», явилось фундаментальным принципом выстраивания кварто-квинтового круга.

Из вышеизложенного можно допустить концепцию формирования двух взаимно перпендикулярных осей, соотнесенных со временем (горизонталь) и Пространством (вертикаль). Существование подобной концепции прослеживается в подходе С. И. Танеева к разработке *системы* подвижных контрапунктов⁴, где горизонтально-подвижной контрапункт апеллирует к смещению темы во времени, а вертикально-подвижной — к звуковысотному «пространственному» обращению по вертикали. В коллективном труде по музыкально-теоретическим системам, говоря о Танееве, отмечается, что «в предварительной версии <...> предисловия к „Подвижному контрапункту“ приведена не вошедшая в окончательный текст

⁴ Когда мы рассматриваем систему симметрии, невозможно говорить о контрапункте с временным смещением и о контрапункте с обращением как о едином типе. Вдвойне подвижной контрапункт (в системе) является третьей пространственной разновидностью

„графическая модель“ преобразования мелодии (см. Иллюстрацию 2а — О. Т.) — вертикального обращения, горизонтального обращения и вертикально-горизонтального обращения — посредством соответственно „повернутой“ латинской буквы Р (вероятно, от лат. *primus*, что по смыслу, а отчасти и по начертанию совпадает с позднейшими обозначениями четырех форм серии)⁵ <...> здесь представлена квинтэссенция того музыкально-логического потенциала, который был накоплен в процессе исторической эволюции, осознан и, наконец, символически сконцентрирован в кристально отточенной формуле» [14, 364].

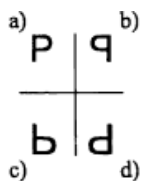


Иллюстрация 2а. Схема системы подвижных контрапунктов С. Танеева.

A	-A
1/A	-1/A

Иллюстрация 2б. Схема системы форм бытия объекта Р. ди Бартини.

Представленная схема имеет многоуровневую трактовку и множественные сферы существования. В частности, аналогичную онтологическую трактовку объекта как такового мы находим в работах известного советского инженера-авиаконструктора, физика, изобретателя, философа Роберта О. ди Бартини. Он отмечал, что «...уникальный объект А сопоставим, по определению, только с самим собою, поэтому его отрицание является внутренним и может иметь только три следующие формы: (см. Иллюстрацию 2б — О. Т.) <...> Установление тождества уникального объекта с самим собой $A \equiv A$, $A \cdot (1/A) = 1$ можно рассматривать как отображение, приводящее образы А в соответствие с прообразом А. <...> Совокупность образов А составляет точечную систему, элементы которой являются эквивалентными точками (в случае музыкальной партитуры равными нотам — О. Т.) <...> преобразование представляет собой вращение или инверсионный поворот» [1, 35–36]. Аналогичных вышеописанным двум можно привести множество моделей.

В обеих представленных моделях определяющим качеством является «симметрия — категория познания — математическое описание движения и его сущности — устойчивости, равновесия, сохранения — инвариантов» [15, 224]. Эквивалентные модели схем в различных научных дисциплинах нуждаются в приведении к более общему фундаментально-категориальному выражению, которое могло бы быть интуитивно понятно всем и реализовано в математическом виде. На наш взгляд, таким общим концептом могла бы стать известная из школьного курса математики Декартова координатная плоскость. Она является интегрирующим эквивалентом описанных выше моделей. Единственным отличием в ней является расположение начального элемента (PRIME), который будет помещаться в ней в первой четверти (квadrante). Поясним применимость системы на примере пространственно-временных категорий.

⁵ Фрагмент из варианта вступления см. в кн.: С. И. Танеев. Из научно-педагогического наследия. С. 42–44.

Декартова Матрица. Формула «Здесь и Сейчас»

Исходя из первичности возникновения ракоходного преобразования оригинала в трактовке развертывания во времени и «привязанного» к горизонтальному вектору этого преобразования, констатируем имманентные ему ассоциативные свойства. Оригинал–Ракоход **P–R** (темпоральность, динамика, процессуальность): перемещение слева-направо («по ходу» течения времени, «за Солнцем»⁶, развертывание — **P**), движение справа-налево (против течения времени, «против Солнца», сворачивание — **R**), ось *x* соотносится с категорией Времени. Отсюда, отношение Оригинал–Инверсия **P–I** (статика, архитектоника): перемещение вверх (позитивное, проявленное, объективное, «Явь» — **P**), движение вниз (негативное, непроявленное, субъективное, «Навь» — **I**), следовательно, ось *y* соотносится с категорией Пространства (Иллюстрация 3).

Положительная ордината (1-й и 2-й квадранты плоскости) — «Здесь», отрицательная ордината — «Не Здесь» (где-то). Положительная абсцисса (1-й и 4-й квадранты) — «Сейчас» (Бытие), отрицательная абсцисса — «Не Сейчас» (Небытие). 1-й квадрант (+, +) — «Здесь и Сейчас» — Физическое Бытие. 2-й квадрант (–, +) — «Здесь, но Не Сейчас» (физическое (фактическое) Бытие в прошлом), 3-й квадрант (–, –) — «Не Сейчас, и Не Здесь» (Абсолютное Небытие), 4-й квадрант (+, –) — «Сейчас, но Не Здесь» (Инобытие). Таким образом, правая полусфера — Время (+), левая полусфера — Время (–); верхняя полусфера — Пространство (+), нижняя полусфера — Пространство (–).

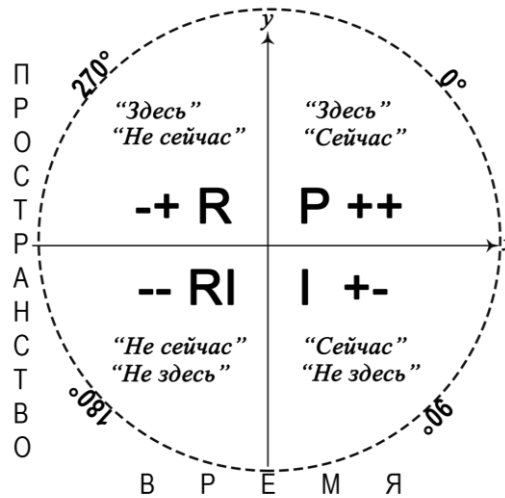


Иллюстрация 3. Концептуальная модель Декартовой Матрицы.

Из четырех видов изложения музыкальной темы (**P–R–I–RI**), называемых *додекатоном кватернионом*⁷ [6, 127–128] или *Матрицей серийных преобразований* (МСП) [4, 35], сформировались две «осевые» пары **P–R** и **I–RI**, явно указывающие на противоположные по вектору времени принципы развертывания. Как мы уже предположили выше, первичной в историческом развитии музыки была, вероятно, пара **P–R**. Пара **I–RI** возникает как результат более позднего «завоевания звукового пространства» (А. Веберн)

⁶ Осолонь — по Солнцу — в славянской традиции движение слева направо, по ходу часовой стрелки; противусолонь — против Солнца — движение справа налево, против хода часовой стрелки.

⁷ Кватернион — стандартный термин обозначения «гиперкомплексных чисел» в математике.

[14, 430]. Опираясь на изложенную Пространственно-Временную трактовку декартовой плоскости и принципиальную тождественность приведенных выше концепций, предлагаем использовать термин **Декартова Матрица** для универсализации данной пространственно-категориальной модели. В дальнейшем мы будем пользоваться термином Декартова Матрица (ДМ).

Если условно экстраполировать первичную пространственную дихотомию (**P–R**) как структурную ось на схему кварто-квинтового круга, привязав ее к основному элементу (*C*, 0), соответственно, его противоположностью по оси будет тритоновый тон (*Fis*, 6). Вторая ось (**I–RI**), автоматически располагаясь перпендикулярно к первой (принцип декартовой плоскости), свяжет второе тритоновое соотношение (*Es*, 3 — *A*, 9). При этом привязка второй оси может иметь и противоположное размещение тонов (*Es*, 9 — *A*, 3), что зависит от направления размещения элементов относительно хода часовой стрелки, а это, в свою очередь, обуславливается интерпретацией внутрисистемной динамики (подробнее см. [11]). Но и в первом, и во втором случае эти точки на окружности (аналогично точкам оси **P–R** *C*, 0 и *Fis*, 6) являются «узловыми», константными, структурно-резонансными. Для возможности рассмотрения данного утверждения определим по умолчанию первое расположение точек второй оси (**I–RI**) — (*Es*, 3 — *A*, 9) так, как это было изначально определено в «Идея грамматики мусикийской» (слева — «диезисовая», справа — «бемолярная») и соответствует логике поступательного перемещения по ходу часовой стрелки, где отношение соседних элементов будет аналогично **D–T**.

В представлении всей двенадцатитоновой системы понятие «последовательный» имеет два основных значения — последовательности квинт (кварт) и хроматической последовательности. Взяв за основу первую последовательность, обратим внимание на выстраивание второй. Каждый последующий шаг (итерация) по часовой стрелке в кварто-квинтовом выражении соответствует перемещению по каждому пятому элементу этого круга, выстраивая хроматическую последовательность: *C-F-B-Es...* || *C-Des-D-Es...* (Иллюстрация 4).

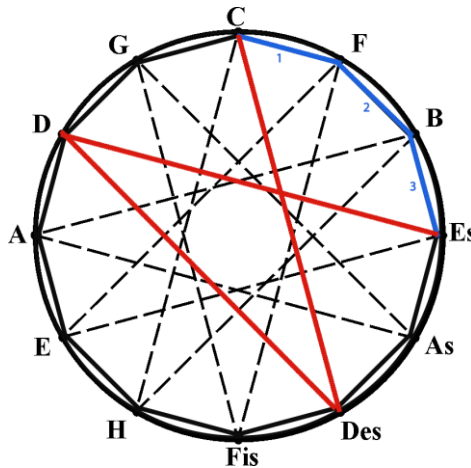


Иллюстрация 4. Соответствие перемещения по хроматической и кварто-квинтовой последовательности.

Диагональ *C-Des* (= *C-Cis*) во вписанном правильном додекагоне является единственной диагональю *связности* $\{12/5\}$ ⁸ в этом многоугольнике⁹. Она позволяет

⁸ Обозначения даются по системе Шлефли. $\{12/5\}$ — диагональ 5 в 12-угольнике.

представить его как звездчатый *нераспадающийся* многоугольник (додекаграмму). Вместе с тем, эта диагональ помогает проявить такие важные свойства в плоскостной двенадцати-элементной системе, как равномерность и континуальность, выраженные через непрерывное равномерно-циркулярное движение. Опираясь на эти свойства, в дальнейшем можно будет трансформировать плоскостную модель в объемное правильное тело (многогранник), вписанное в сферу. В нашем случае это — додекаэдр.

Так как в геометрии додекагона, вписанного в окружность, диагональ $\{12/6\}$ равна диаметру окружности и может быть выражена в системе радиан как угол величиной $2\pi/2=\pi$ радиан¹⁰, остальные углы мы таким же образом сможем представлять в системе радиан. Центральный угол ($\angle CODes$), противоположный диагонали связности, равен 150° в градусах (Иллюстрация 5а) или $\frac{5\pi}{6}$ в радианах. Такую же величину имеет любой внутренний угол (например, $\angle GCF$) — (Иллюстрация 5б).

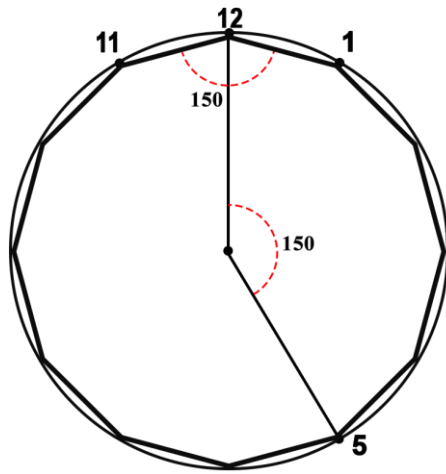


Иллюстрация 5а. Величина центрального и внутреннего углов додекагона.

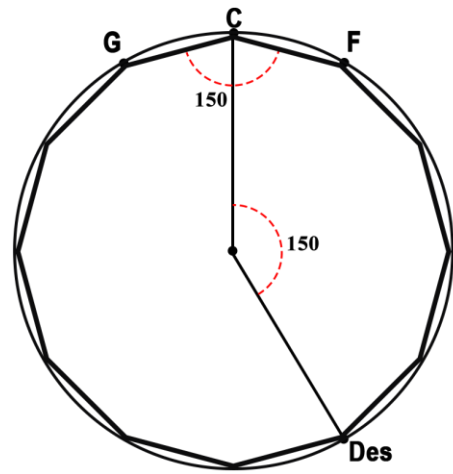


Иллюстрация 5б. Центральный и внутренний углы в схеме кварто-квинтового круга.

Вероятно, это обстоятельство играет немаловажную роль в том, что диагональ связности является «осью обращения» системы кварто-квинтовой последовательности в хроматическую и наоборот. А формула структурной взаимосвязи полутона и квинты, о которой упоминает Цуккерман, говоря о переводе «ладо-ритмических понятий, где все основано на полутоне, в понятия обычной гармонии, где все основано на квинте» [14, 392],

выглядит в этой схеме следующим образом: $y(x) = \frac{5\pi}{6} x$, где x – количество итераций (шагов)

D–T соотношения (по ходу часовой стрелки) в системе кварто-квинтовой последовательности; y — соответствующая позиция для каждой итерации в восходящей

⁹ Поскольку додекагон внутренне симметричен, то диагональ $\{12/5\}$ будет равна в симметрии диагонали $\{12/7\}$, то есть $\{12/-5\}$. Поэтому, рассматривается, как правило, минимальное отношение от 0 до 6.

¹⁰ Измерения углов обычно приводятся в градусах или радианах. Единица градуса, изобретенная древними вавилонянами, делит один полный оборот на 360° (градусов). Углы больше 360° представляют собой величину, превышающую один оборот. Другая единица измерения — радиан, соотносит величину угла с радиусом окружности, образованной одним оборотом, делит оборот (круг — $O. T.$) на 2π единиц. В большинстве теоретических тригонометрических работ радиан является основной единицей измерения угла. [16, 4096]. Радианы всегда представлены в виде π , где значение π равно $22/7$ или $3,14$.

хроматической последовательности (Иллюстрация 11а). Таким образом, данная взаимосвязь в последовательном перемещении описывает корреляцию между линейным циркулярным перемещением $\{12/1\}$ и перемещением по диагонали связности в додекагоне $\{12/\pm 5\}$, которая позволяет последовательно описать все его углы (гамильтонов цикл¹¹) при равномерном поступательном циркулярном перемещении и определяющей его как звездчатый многоугольник или *додекаграмму*.

Как видно из приведенной ранее схемы (Иллюстрация 4), на третьей итерации оба вектора приходят к точке *Es* (образуя диагональ между «узловыми» стационарными точками $\{12/3\}$). Исходя из свойств симметричности додекагона, на шестой итерации векторы сойдутся в точке *Fis*, а на девятой итерации — в точке *A*. В результате, с точки зрения музыкальной системы, из комплекса этих диагоналей образуется пространственно-устойчивая структура пересекающихся тритоновых осей ($C-Fis \perp Es-A$) уменьшенного септаккорда, об универсальных модулирующих свойствах которого хорошо известно, а с точки зрения геометрических свойств додекагона образуется симметричная пространственная структура, архитектурно-осевой «каркас», который можно рассматривать в 3-мерном пространстве как синусоидальный период с четырьмя устойчивыми фазовыми состояниями ($C-Es-Fis-A = 0^\circ(360)^\circ-90^\circ-180^\circ-270^\circ = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \pi - \frac{3\pi}{2} =$

P-I-R-RI).

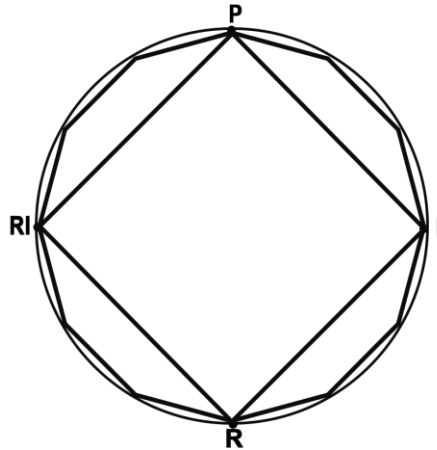


Иллюстрация 6. Пространственная структура опорно-фазовых «резонансных точек».

С позиции модульной арифметики Гаусса точка *Es(3)* в «статическом» выражении кварто-квинтового круга конгруэнтна точке *Es(15)* по модулю 12 ($es(3) \equiv es(15) \pmod{12}$) в «динамическом» выражении хроматической последовательности. Соответственно, все «резонансные точки» остаются константными при равном линейном и инверсивном перемещении, то есть — «в статике» и «в динамике».

На структурную неизменность матричного типа этого комплекса косвенно указывает Светлана Гончарова при рассмотрении преобразований музыкальной серии, сравнивая магический квадрат «Sator...»¹² с додекафонной квадратной матрицей 12-го порядка: «При повороте квадрата на 90° , 180° , 270° по часовой стрелке основным рядом становятся

¹¹ В теории графов «гамильтоновым циклом» является такой цикл (замкнутый путь), который проходит через каждую вершину данного графа ровно по одному разу» [10, 55].

¹² Латинский античный супер-палиндром (бустрофедон) «Sator arepo tenet opera rotas», записываемый в виде квадрата.

Иллюстрация 9. Фрагмент редукции Ноктюрна Э. Грига [13, 390–391].

Описанный выше архитектурно-осевой «каркас» также можно мультиплицировать со смещением (как объект) в рамках 12-элементной круговой схемы. При этом, в отличие от описанного выше *нераспадающегося* звездчатого многоугольника, образованного диагональю связности, тройная итерация со смещением Декартовой Матрицы (ДМ) пространственного кватерниона создает второй звездчатый многоугольник, но *распадающийся*. Для определения расположения элементов второй и третьей ДМ необходимо учитывать то, что *системная инверсия* по диагоналям связности позволяет переходить от линейного (условно *континуального*) отображения хроматической последовательности элементов к дискретному ее отображению в кварто-квинтовой последовательности. Исходя из этого, расположение элементов ДМ предполагает наследование особенностей этого преобразования и потенциально должно иметь в свойствах своего расположения в системе как описанную выше крестообразную дискретность, так и линейную континуальность по ее окружности. Следовательно, начало каждой последующей ДМ на окружности должно располагаться после четырех элементов предыдущей. Отсюда, элемент $P(0)$ в первой ДМ определит соответствующие местоположения для P во второй и третьей Декартовых Матрицах как $P(0)+4$ и $P(0)+4+4$ при движении по ходу часовой стрелки (по схеме Иллюстрация 10а).

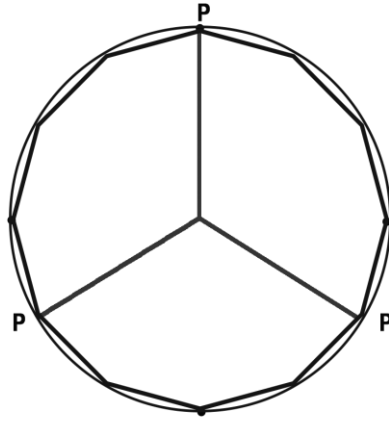


Иллюстрация 10а. Расположение конгруэнтных точек **P** Декартовых Матриц на додекагоне.

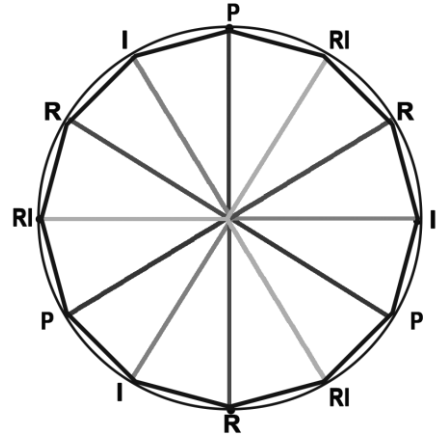


Иллюстрация 10б. Полное расположение точек трех Декартовых Матриц на додекагоне.

Таким образом, линейная серия второй Декартовой Матрицы начинается на позиции «4» ($= \frac{2\pi}{3}$) часового циферблата, а начало третьей серии ДМ находится на позиции «8» ($= \frac{4\pi}{3}$). В кварто-квинтовом выражении это позиции *As* и *E*. Исходя из свойств симметрии додекагона и в соответствии с принципами комбинаторики и модульной арифметикой Гаусса, те же позиции могут быть найдены при движении против хода часовой стрелки $\mathbf{P(0)-4=8 \pmod{12}}$ ($= -\frac{2\pi}{3}$) и $\mathbf{P(0)-4-4=4 \pmod{12}}$ ($= -\frac{4\pi}{3}$).

Эти три точки конгруэнтны между собой по модулю 4 и образуют начала трех периодов в синусоиде всей системы. Характерно, что образуемый ими символ паритетной троичности (часто с направленной круговой динамикой) можно найти в культуре практически любой цивилизации и религиозно-мифологической системе (Трикварт, Трискелион, Триратна, Томоз и др.).

Произведя аналогичные операции с каждым элементом начальной (дискретной) Декартовой Матрицы (Иллюстрация 6), очевидной становится следующая линейная последовательность ее элементов на окружности (Иллюстрация 10б): **P-RI-R-I** при движении по ходу часовой стрелки. Обозначенный выше распадающийся звездчатый многоугольник образуется тройным комплексом диагоналей $\{12/3\} + (\{12/3\}+4) + (\{12/3\}+4+4)$, где $\{12/3\} \equiv (\{12/3\}+4) \equiv (\{12/3\}+8) \pmod{4}$. Отсюда единичный период («резонансный комплекс») RC1 (0-3-6-9) конгруэнтен по (mod 4) аналогичным «резонансным комплексам» RC2 (4-7-10-1) и RC3 (8-11-2-5) соответственно: $\text{RC1 } (C-Es-Fis-A) \equiv \text{RC2 } (As-H-D-F) \equiv \text{RC3 } (E-G-B-Cis) \pmod{4}$. Также эта комплексная структура может быть выражена против хода часовой стрелки: $\{12/3\}+(\{12/3\}-4)+(\{12/3\}-4-4)$.

Необходимо отметить, что в музыкальном выражении кварто-квинтового круга *против хода часовой стрелки* (по схеме) движение происходит в сторону увеличения диезов («восходящий вектор» — *C-G-D-A-E...*), в то время как движение в хроматической последовательности имеет компенсирующий «нисходящий» вектор (*C-H-B-A-As...*) и *vice versa*. Следовательно, правосторонний вектор кварто-квинтового перемещения (Иллюстрация 11а), имеющий положительный знак (по ходу часовой стрелки), можно выразить в ДМ через концепт (элемент, категорию) Prime, а левосторонний вектор с отрицательным знаком (против хода часовой стрелки), соответственно, — Retrograde. Отсюда, те же векторы

хроматического перемещения (по *диагоналям связности*) являются в системе *инверсионными* — соответственно, Inversion и Retrograde Inversion. Это легко проверить, взяв за основу (в качестве Prime) хроматическую восходящую последовательность (C-Cis-D-Es-E...). Ракоходной (Retrograde), соответственно, будет C-H-B-A-As... (Иллюстрация 11б). В этом случае кварто-квинтовая последовательность расположится по диагоналям связности с теми же знаками векторов — инверсией C-F-B-Es-As... и соответствующим ракоходом инверсии C-G-D-A-As...

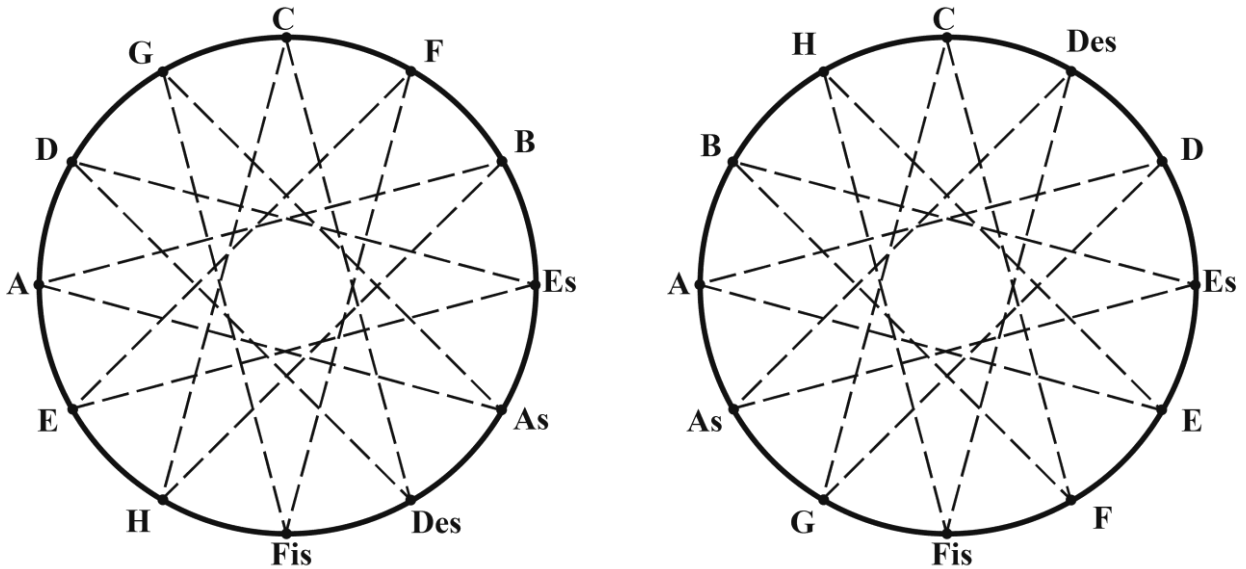


Иллюстрация 11. Кварто-квинтовая последовательность (а); Хроматическая последовательность (б).

Рассматривая последовательность элементов ДМ в кварто-квинтовом выражении и соотнося их с обозначенными фазами синусоиды, очевидным становится уравновешенность общего движения по ходу часовой стрелки (по схеме) движением против хода часовой стрелки в фазовых значениях синусоиды. Иными словами, двигаясь по окружности в последовательности C-F-B-Es-As... (по ходу часовой стрелки) последовательность фазовых состояний будет следующей: **P-RI-R-I** = 360°-270°-180°-90°... (см. выше Иллюстрация 6), т.е., против хода часовой стрелки. Внутренний «потенциал» системы, если рассматривать ее в контексте энергетической теории Э. Курта, находится в динамическом равновесии.

Из всего вышеизложенного следует очень важный вывод: *диагонали связности додекагона, образующие нераспадающуюся звездчатую форму (додекаграмма), являются осью системной инверсии кварто-квинтового круга и хроматической последовательности. Они же позволяют выявить свойство континуальности и динамической равномерности в системе наряду с линейной последовательностью элементов додекагона, что связано с равномерностью циркулярного движения. Это открывает возможность трансляции данной системы из плоскостной пространственной модели в объемный правильный многогранник — додекаэдр. Внутренний «динамический потенциал» системы сбалансирован противоположными векторами внешнего кварто-квинтового перемещения и внутреннего (фазового) «наполнения» его элементов. Константными «каркасно-резонансными» точками в тонально ориентированной системе являются позиции $2\pi, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ (0-3-6-9 по схеме), они же — тоны уменьшенного вводного септаккорда двойной доминанты, если начальный*

(ключевой) элемент системы приравнять к тонике в условиях тональности (см. Иллюстрации 6 и 11) или первый «резонансный комплекс» RC1. *Четыре разновидности представления мелодии в полифонической и додекафонно-сериальной композиции (P-R-I-RI) имеют более широкую, чем исключительно в сериально-додекафонной и полифонической практике, сферу применения в концептуально-структурных комплексах, в том числе, в философских и в музыкальных (например, танеевская система подвижных контрапунктов). Для удобства идентификации предлагаем определять этот комплекс как **Декартову Матрицу** — систему простейших пространственно-симметричных преобразований, соответствующую Четверной группе Клейна (V_4)¹³ и простейшей группе диэдра (D_2)¹⁴. Данный термин, на наш взгляд, более универсален и интуитивно понятен как математикам и физикам, так и музыкантам-теоретикам и философам, в сфере исследований которых он имеет значимое место. Подобная универсализация терминологии фундаментальных концепций может способствовать привлечению к совместным исследованиям ученых разных научных сфер.*

¹³ Наименьшая нециклическая коммутативная группа четвертого порядка. Группа впервые описана и исследована Феликсом Клейном в 1884 году в работе «Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade».

¹⁴ Группа симметрии правильного многоугольника, включающая как вращения, так и осевые симметрии.

Литература

1. *Бартини Р. О.* Соотношения между физическими величинами // Роберт Орос ди Бартини — советский авиаконструктор, физик–теоретик, философ. Статьи по физике и философии. Составитель А. Н. Маслов. М.: Самообразование, 2009. 224 с.
2. *Гельмгольц Г. Л. Ф.* Учение о слуховых ощущениях как физиологическая основа для теории музыки. Санкт-Петербург: Общественная польза, 1875. 595 с.
3. *Герасимова И. В.* Николай Дилецкий: творческий путь композитора XVII века. Диссертация на соискание ученой степени кандидата искусствоведения. М., 2010. 462 с.
4. *Гончаренко С. С.* Визуальные паттерны додекафонии // Актуальные проблемы высшего музыкального образования № 4 (38), 2015. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vizualnye-patterny-dodekafonii> (дата обращения: 22.09.2023).
5. *Дилецкий Н. П.* Идея грамматики мусикийской. 1679. [б. м.]: Архив Российской Государственной Библиотеки. Ф. 173. № 107.
6. *Когоутек Ц.* Техника композиции в музыке XX века. М.: Музыка, 1986. 267 с.
7. *Лосев А. Ф.* Музыка как предмет логики / А. Ф. Лосев // Форма. Стиль. Выражение. М.: Мысль, 1995. С. 194–369.
8. *Дилецкий Н. П.* Идея грамматики мусикийской. Публ. и исслед. В. Протопопова. М.: Музыка, 1979. 510 с.
9. *Ницце Ф.* Сочинения в 2 т. Т. 1 / Сост., ред. изд., вступ. ст. и примеч. К. А. Свасьяна; Пер. с нем. М.: Мысль, 1996. 829, [2] с, 1 л. портр. (Филос. наследие).
10. *Свами М.* Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. М.: Мир, 1984. 455 с.
11. *Таганов О. Н.* Пространственно-векторные доминанты в искусстве: источники формирования и особенности / О. Н. Таганов // Журнал Общества теории музыки, № 1 (41), 2023. С. 23–35. <https://doi.org/10.26176/otmroo.2023.41.1.003>.
12. Теория современной композиции: Учебное пособие. Отв. ред В. С. Ценова. М.: Музыка, 2005. 624 с.
13. *Холопов Ю. Н.* Гармония: теоретический курс. СПб.: Лань, 2003. 544 с.
14. *Холопов Ю. Н., Кириллина Л. В., Кюрегян Т. С., Лыжов Г. И., Поспелова Р. Л., Ценова В. С.* Музыкально-теоретические системы: Учебник для историко-теоретических и композиторских факультетов музыкальных вузов. М.: Композитор, 2006. 632 с.
15. *Шевелев И. Ш., Марутаев М. А., Шмелев И. П.* Золотое сечение: Три взгляда на природу гармонии. М.: Стройиздат, 1990. 343 с.
16. *Gale encyclopedia of science* / К. Lee Lerner & Brenda Wilmoth Lerner, editors. Vol. 6 (Star cluster–Zooplankton) pp. 3801–4378.

References

1. Bartini, Robert O. 2009. "Sootnosheniya mezhdru fizicheskimi velichinami [Relationships Between Physical Quantities]." In *Stat'i po fizike i filosofii* [Articles on Physics and Philosophy], compiled by Aleksandr N. Maslov. M.: Samoobrazovanie. (In Russian).
2. Helmholtz, Hermann L. F. 1875. *Uchenie o slukhovykh oshchushcheniyakh kak fiziologicheskaya osnova dlya teorii muzyki* [Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik]. Saint Petersburg: Obshchestvennaya pol'za. (In Russian).
3. Gerasimova, Irina V. 2010. "Nikolay Diletskiy: tvorcheskii put' kompozitora XVII veka [Nikolai Diletsky: Creative Path of the XVII Century Composer]." Ph.D. diss., Moscow. (In Russian).
4. Goncharenko, Svetlana S. 2015. "Vizual'nye patterny dodekafonii [Visual Patterns of Dodecaphony]." *Aktual'nye problemy vysshego muzykal'nogo obrazovaniya / Actual problems of higher music education* 38, no. 4. Accessed September 22, 2023. <https://cyberleninka.ru/article/n/vizualnye-patterny-dodekafonii>. (In Russian).
5. Diletskiy, Nikolay P. 1679. *Idea grammatiki musikiyskoy* [The Idea of Musikian Grammar]. Arkhiv Rossiyskoy Gosudarstvennoy Biblioteki. F. 173. no. 107. (In Old Russian).
6. Kohoutek, Ctirad. 1986. *Tekhnika kompozitsii v muzyke XX veka* [Techniques of Composition in Twentieth-century Music]. Moscow: Muzyka. (In Russian).
7. Losev, Aleksey F. 1995. "Muzyka kak predmet logiki [Music as a Subject of Logic]." In *Forma. Stil'. Vyrazhenie*. [Shape. Style. Expression]. Moscow: Mysl'. (In Russian).
8. Diletskiy, Nikolay P. 1979. *Idea grammatiki musikiyskoy* [The idea of Musikian Grammar]. Publ., translated and commented by Vladimir V. Protopopov. Moscow: Muzyka. (In Russian).
9. Nietzsche, Friedrich W. 1996. *Sochineniya* [Essays]. Compiled, edited and commented by Karen A. Svas'yana. Moscow: Mysl'. (In Russian).
10. Svami, Matkhara. 1981. *Graphs, Networks and Algorithms*. Moscow: Mir. (In Russian).
11. Taganov, Oleg N. 2023. "Prostranstvenno-vektornye dominanty v iskusstve: istochniki formirovaniya i osobennosti [Spacio-Temporal Dominants in Art: Sources for Formation and Peculiarities]." *Zhurnal Obshchestva teorii muzyki* 41 no. 1, 23–35. <https://doi.org/10.26176/otmroo.2023.41.1.003>. (In Russian).
12. Tsenova, Valeria S, ed. 2005. *Teoriya sovremennoy kompozitsii: Uchebnoe posobie* [Theory of Modern Composition: Textbook]. Moscow: Muzyka. (In Russian).
13. Kholopov, Yuriy N. 2003. *Garmoniya: teoreticheskiy kurs* [Harmony: theoretical course]. Saint Petersburg: Lan'. (In Russian).
14. Kholopov, Yuriy N., Larisa Kirillina, Tat'yana Kyuregyan, Grigoriy Lyzhov, Rimma Pospelova, and Valeria Tsenova. 2006. *Muzykal'no-teoreticheskie sistemy: Uchebnyk dlya istoriko-teoreticheskikh i kompozitorskikh fakul'tetov muzykal'nykh vuzov* [Musical-theoretical Systems: Textbook for Historical-theoretical and Composition Faculties of Music Universities]. Moscow: Kompozitor. (In Russian).
15. Shevelev, Iosif Sh., Mikhail A. Marutaev, and Igor' P. Shmelev. 1990. *Zolotoe sechenie: Tri vzglyada na prirodu garmonii* [The Golden Ratio: Three Views on the Nature of Harmony]. Moscow: Stroyizdat. (In Russian).
16. Lerner, Brenda Wilmoth, and K. Lee Lerner, editors. 2004. *Gale encyclopedia of science*. Vol. 6 (Star cluster–Zooplankton), 3801–4378.